

Übungsblatt 3

Besprechung am **31.03.2006**.

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen.

- a) Ermitteln Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, \bar{z} , und $|z|$:

$$z = 3 + 2i, \quad z = -i, \quad z = \frac{1+i}{2-i}, \quad z = 3 - i + \frac{1}{3-i}.$$

- b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = re^{i\varphi}$ dar und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene:

$$z = -1 - i, \quad z = -5, \quad z = 3i, \quad z = 2 - 2i.$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, ob folgende Folgen konvergieren oder nicht, und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, & b_n &= -n + \frac{1}{n}, & c_n &= \left(-\frac{1}{n}\right)^n, \\ d_n &= n - \frac{n^2 + 3n + 1}{n}, & e_n &= 1/2 (e^n + e^{-n}), & f_n &= \cos(n\pi). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Majoranten/Minoranten-Kriteriums auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Aufgabe 4 Führen Sie einen formalen Nachweis mittels Nullfolgen, dass

- die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.
- die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist.

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervalls $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ($b \geq a$) und $x \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\varepsilon := b - a$ des Intervalls ist, desto genauer ist x beschrieben.

Schreiben Sie in Maple eine Prozedur, die zu gegebenen $x, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \varepsilon$ und $\sqrt[3]{x} \in [a, b]$ berechnet. (Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.)

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 30.03.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.