Das Unendliche im mathematischen Alltag

Winkler, Franz
Linz, Österreich
franz.winkler@risc.jku.at

Abstrakt: Das Unendliche hat eine lange und wechselhafte Geschichte in der Mathematik. Das Problem der griechischen Philosophie und Mathematik mit dem Unendlichen drückt sich aus in den Paradoxien von Zeno von Elea. Andererseits gab Archimedes einen unendlichen Prozess an, um den Umfang eines Kreises zu bestimmen. Wirklicher Fortschritt im Umgang mit dem Unendlichen wurde erst im 19. Jahrhundert gemacht mit der Theorie der Konvergenz und der Einführung der Mengentheorie von Georg Cantor. Dabei wurde gleich eine unendliche Hierarchie von Unendlichkeiten eingeführt. David Hilbert hatte keine Scheu, mit unendlichen Objekten umzugehen, und über sie Beweise zu führen, ohne konkret Elemente dieser unendlichen Mengen zu konstruieren. Ja er war der festen Überzeugung, dass jedes mathematische Problem sich letztlich auch lösen läßt. Die Resultate von Gödel und Turing zeigen uns aber, dass die Mathematik in ihrer Unendlichkeit sich letztlich immer unserem Zugriff entzieht. Die heutige Mathematik geht selbstverständlich mit unendlichen Mengen um. Wir geben dazu Beispiele an. Inwieweit solche unendlichen Mengen nur potentiell oder doch real existieren, wird in der Mathematik nicht beantwortet. Das bleibt eine Frage der Philophie.

Eine kurze Geschichte des Unendlichen

Die Mathematik der antiken Griechen konnte mit dem Unendlichen nicht wirklich umgehen. Insbesondere konnten sich die meisten Philosophen und Mathematiker der damaligen Zeit – die Trennung der Wissenschaften, wie wir sie heute verstehen, gab es noch nicht – nicht zum Begriff des Kontinuums in Raum und Zeit durchringen. Ihr Denken war zutiefst im Diskreten verhaftet. Das zeigt sich etwa an den Paradoxien des Zeno von Elea (ca. 490–430 v.Chr.) oder auch am Umgang der Pythagoräer mit Zahlen.

Eine der bekanntesten Paradoxien von Zeno ist bekannt als Achilles und die Schildkröte. Achilles und eine Schildkröte laufen um die Wette. Fairerweise gibt Achilles der Schildkröte einen kleinen Vorsprung. Wie nun soll Achilles jemals diesen Vorsprung aufholen? Aristoteles, in seinem Band über die Physik, gibt das Problem folgendermaßen wieder: ,,In einem Rennen kann der schnellere Läufer den langsameren niemals einholen; der Verfolger muss nämlich zuerst den Punkt erreichen, von welchem aus der Verfolgte gestartet ist, sodass der Langsamere immer dem Schnelleren voraus ist.” Die Auflösung dieses Paradoxons ließ lange auf sich warten, im wesentlichen bis ins 19. Jahrhundert, in welchem schließlich die Begriffe von Grenzwert und Konvergenz entwickelt wurden.

Dass der Umfang eines Kreises ein konstantes Vielfaches des Durchmessers ist, war in den antiken Mathematikern klar. Es gelang aber nicht, diesen Faktor π als gebrochene Zahl m/n darzustellen. Zwar gab Archimedes ein Näherungsverfahren für π an, aber dass man π nicht rational darstellen konnte, blieb ein Rätsel. Heute wissen wir, dass π irrational ist, also nicht Wurzel eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten, wohl aber reell, also Grenzwert einer rationalen Zahlenfolge.

Ein weiteres Beispiel für das Problem der Antike mit dem Begriff des Unendlichen bieten die Pythagoräer und ihr Umgang mit ,,inkommensurablen” Zahlen. Die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 ist bekanntlich $\sqrt{2}$, wie man unschwer aus dem Satz von Pythagoras über rechtwinkelige Dreiecke sieht. Aber die Seitenlänge 1 und die Länge der Diagonale $\sqrt{2}$ lassen sich nicht als Vielfache einer einzigen Längeneinheit darstellen, sie sind inkommensurabel. Auch dieses Problem musste lange auf eine zufriedenstellende Behandlung warten, im wesentlichen auch bis ins 19. Jahrhundert und die Überlegungen von Dedekind (Dedekind 1888, 1892).

Cantor und der Begriff des Unendlichen

Georg Cantor ist es schließlich gelungen, in seiner Schrift (Cantor, 1895) den Grundstein für einen mathematisch sauberen Umgang mit dem Begriff des Unendlichen zu legen. In seiner Mengenlehre ging es ganz wesentlich auch um den Begriff der ,,Mächtigkeit" von Mengen; umgangssprachlich ausgedrückt um die Größe einer Menge. Ausgehend von Cantor wollen wir zwei Mengen A und B gleichmächtig nennen, wenn es zwischen ihnen eine Zuordnung gibt, welche jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet, und umgekehrt. So sind etwa die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{a, b, c\}$ wohl verschieden, aber gleichmächtig. Alle Mengen, welche zur Menge $\{1, 2, 3\}$ gleichmächtig sind, haben die Mächtigkeit 3. Solche Mächtigkeiten nennt man Kardinalzahlen. Auf diese Weise haben also alle endlichen Mengen eine wohldefinierte Mächtigkeit oder Kardinalität. Was aber ist nun mit der Menge $\mathbb{N}$, der Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$? Offenbar ist sie zu keiner endlichen Menge gleichmächtig. Wir nennen ihre Mächtigkeit $\aleph_0$ (Aleph-Null). Nun kann man sich überzeugen, dass auch die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, also die gebrochenen Zahlen m/n, die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat; ebenso die Menge der algebraischen Zahlen, also aller Wurzeln von Polynomen mit rationalen Koeffizienten (etwa $\sqrt{2}$). Nimmt man aber in die Zahlengerade auch alle Grenzwerte konvergenter Folgen rationaler Zahlen auf, so erhält man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und $\mathbb{R}$ hat eine höhere Mächtigkeit c (Continuum) als $\mathbb{N}$. Ob es zwischen $\aleph_0$ und c eine Kardinalzahl gibt, war lange eine ungelöste Frage der Mengentheorie. Die Vermutung, so etwas gäbe es nicht, heisst die ,,Kontinuumshypothese". Heute wissen wir, dass die Kontinuumshypothese weder aus den Axiomen der Mengentheorie folgt, noch ihnen widerspricht; sie ist von den Axiomen der Mengentheorie unabhängig.

Zu jeder Menge A kann man die Menge ihrer Teilmengen betrachten, die sogenannte Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$. Und man kann zeigen, dass $\mathcal{P}(A)$ immer eine höhere Mächtigkeit als A besitzt. Damit gibt es also eine unendliche Kategorie von Kardinalitäten.

Hilbert und das "Ignorabimus" in der Mathematik

Um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert war der Göttinger Mathematiker David Hilbert einer der wesentlichen Proponenten der Mathematik. Neben grundlegenden Werken zur Begündung der Zahlentheorie, der Logik und der Geometrie hat er auf dem Mathematikerkongress in Paris im Jahr 1900 seine 23 mathematischen Probleme vorgestellt als Programm für die Mathematik im anbrechenden neuen Jahrhundert. Diese sogenannten Hilbert-Probleme haben großteils die Erwartungen erfüllt und zu interessanter neuer Mathematik geführt. Das erste Problem handelt übrigens von Cantors Begriff der Mächtigkeit von Mengen, und beinhaltet die Frage nach der Beweisbarkeit der Kontinuumshypothese.

In (Hilbert, 1901) hat Hilbert eine schriftliche Version seines Pariser Vortrags vorgelegt. Darin schreibt er am Ende der Einleitung: ,,Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!" Hilbert war also überzeugt, dass wir aus der unendlichen Fülle mathematischer Fragestellungen (wir beschränken uns auf Entscheidungsfragen) jede noch so komplizierte herausgreifen können, und schließlich eine entscheidende Anwort „ja/nein" geben können. Im Jahr 1928 konkretisierte Hilbert diese Fragestellung und formulierte das sogenannten „Entscheidungsproblem". Es fragt nach einem Algorithmus, welcher als Input ein Axiomensystem für eine Logik erste Ordnung sowie eine logische Formel nimmt, und die Anwort Ja oder Nein gibt, je nachdem, ob die Formel aus den Axiomen folgt oder nicht. Es wäre das also ein endliches Verfahren, um die Unendlichkeit logischer Theorien in den Griff zu bekommen.

Turing, Church und Gödel und das "Ignorabimus"

Diese Hoffnung Hilberts auf einen Algorithmus für das Entscheidungsproblem wurde wenige Jahre später durch Arbeiten von Kurt Gödel (Gödel, 1931), Alan Turing (Turing, 1936) und Alonzo Church (Church, 1936) zerschlagen. Gödel zeigte, dass jedes logische System erster Ordnung, in welchem man wenigstens die Arithmetik natürlicher Zahlen formulieren kann, unentscheidbar ist. Dabei muss die Menge der Axiome wenigstens rekursiv aufzählbar sein, also ein Algorithmus muss in endlich vielen Schritten erkennen können, ab eine Formel ein Axiom ist oder nicht. Ein solches System enthält notwendigerweise Aussagen, die im System selbst weder beweisbar noch widerlegbar sind. Vielleicht ist ja die Goldbachsche Vermutung von dieser Art.

Sowohl Turing mit seiner Turing-Maschine als auch Church mit seinem λ-Kalkül gaben semi-maschinelle Verfahren an, welche als formale Computer gesehen werden können. Turing-Maschinen und λ-Kalkül sind als Berechnungsverfahren äquivalent. Jeder moderne Supercomputer ist eine konkrete Realisierung einer Turing-Maschine. Darüber hinaus läßt sich ein Beweisvorgang in der Logik erster Ordnung verstehen als ein Rechenvorgang einer Turing-Maschine, und auch umgekehrt entspricht jede Rechnung einer Turing-Maschine einem Beweisvorgang. Nun kann man fragen, ob zu einer gegebenen Turing-Maschine M und einem Input I entschieden werden kann, ob M bei Input I jemals anhält und einen Output liefert, oder eventuell unendlich lange rechnet. Dieses sogenannte „Halteproblem" für Turing-Maschinen ist unentscheidbar, wie Turing selbst gezeigt hat.

Die Resultate von Gödel, Turing und Church dämpften also Hilberts feste Überzeugung in Bezug auf das Ignorabimus in der Mathematik.

Unendliche Objekte im mathematischen Alltag

Die meisten Mathematiker gehen in ihrer täglichen mathematischen Arbeit ganz selbstverständlich mit unendlichen Mengen um. Nicht nur eine logische Theorie erster Ordnung oder der n-dimensionale Euklidsche Raum sind unendlich, auch schon die Lösungsmenge eines Systems linearer, algebraischer oder differentieller Gleichungen ist typischerweise unendlich. Wie geht man nun mit diesen unendlichen Objekten um? Man versucht sie aus endlich vielen Grundbausteinen, einer Basis, zu erzeugen. So läßt sich etwa der 2-dimensionale Raum, die Ebene, verstehen als alle Linearkombinationen $\lambda \cdot b_1 + \mu \cdot b_2$, wobei $b_1 = (1, 0)$ und $b_2 = (0, 1)$.

Polynome der Art $f(x, y) = 3x^2y - 5xy + 2$ sind zentrale mathematische Objekte. Mit ihrer Hilfe lassen sich geometrische Gebilde wie Kreis, Parabel, Flächen im 3-dimensionalen und höherdimensionalen Raum beschreiben. Nun kann man sich fragen, ob für die Beschreibung solcher durch Polynome charakterisierter geometrischer Objekte eventuell unendlich viele Polynome notwendig sein könnten. Zum Glück ist das nicht so. Hilbert hat in seinem berühmten Basissatz (Hilbert, 1890) gezeigt, dass jedes geometrische Gebilde, welches als Nullstellenlokus einer beliebigen Menge von Polynomen beschrieben werden kann, immer auch schon als Nullstellenlokus endlich vieler Polynome aufgefasst werden kann. In der Sprache der Algebra ausgedrückt heißt das: jedes Polynomideal hat eine endliche Basis. Die Basis beschreibt dasselbe geometrische Gebilde wie die ganze unendliche Menge ihrer Linearkombinationen, also wie das von ihr aufgespannte Ideal. Mit diesen unendlichen Idealen kann man rechnen, sie addieren, multiplizieren, dividieren. Und oft ist es geradezu befreiend, von der endlichen Basis überzugehen zum unendlichen Ideal. Dieses läßt sich nämlich durch viele Basen beschreiben, und man gewinnt die Freiheit, eine für bestimmte Fragestellungen ,,gute" Basis zu wählen.

Hat man nun so eine endliche Basis $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ (etwa eines Polynomideals) vorliegen, so kann man sich fragen, ob zwischen diesen Basiselementen Beziehungen bestehen ob es also nicht-triviale Lösungen der Gleichung $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$ gibt. Ein solches System von Koeffizienten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ nennt man eine Syzygie zu B. Es stellt sich heraus, dass die Syzygien ihrerseits durch eine endliche Basis darstellbar sind. Gibt es nun Beziehungen zwischen den Elementen der Basis für diese Syzygien? Das führt zu Syzygien zweiter Ordnung; u.s.w. Geht das nun ad infinitum so dahin? Nein, geht man von Polynomen in n Variablen aus, so bricht diese sogenannte Auflösung/Resolution nach n Schritten ab. All das hat Hilbert in (Hilbert, 1890) bewiesen.

Abschlussbemerkungen

Wie wir gesehen haben, beschäftigt sich die Mathematik seit ihrer Urgeschichte mit dem Begriff des Unendlichen. Während er zunächst bedrohlich schien und zu Paradoxien Anlass gab, hat man inzwischen gelernt mit ihm zu leben und ihn auch als Chance zu begreifen. Ich als praktizierender Forscher in Algebra, Geometrie und Logik habe während meiner mathematischen Tätigkeit den starken Eindruck, dass diese unendlichen Mengen tatsächlich existieren, vor mir liegen, und ich sie nur eingehend genug untersuchen muss. Im mathematischen Alltag bin ich also gewissermaßen Platoniker. Wenn ich mich allerdings zurücklehne, und über meine Arbeit nachdenke, dann bin ich mir nicht mehr so sicher. Manchmal sehe ich mich dann selbst als Formalisten.

Die Frage, ob unendliche mathematische Objekte tatsächlich existieren oder nur durch formalistisches Spiel entstehen, ist im Kern keine mathematische sondern eine philosophische Frage. Von praktischem Nutzen sind unendliche Objekte auf jeden Fall.

Literatur

Cantor, G. (1895) ,,Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", Math. Ann. XLVI, 481–512.

Church, A. (1936) ,,An unsolvable problem of elementary number theory", Amer. J. Math. 58, 345–363.

Dedekind, R. (1888) ,,Was sind und was sollen die Zahlen?", Braunschweig: Vieweg.

Dekekind, R. (1892) ,,Stetigkeit und irrationale Zahlen", Braunschweig: Vieweg.

Gödel, Kurt (1931) ,,Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", Monatshefte f. Math. u. Physik 37, 349–360.

Hilbert, David (1890) ,,Über die Theorie der algebraischen Formen", Math. Annalen 36, 473–534.

Hilbert, David (1901) ,,Mathematische Probleme", Archiv f. Math. u. Physik, 3.Reihe, Bd. 1, 44–63, 213–237.

Turing, Alan M. (1936) ,,On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", Proc. London Math. Soc., series 2, 42: 230–265.